



TITLE:

食事療法中の糖尿病患者の看護を記述する数理モデルに現れる最適化問題 (関数方程式のダイナミクスと数理モデル)

AUTHOR(S):

滝口, 成美; 滝口, 孝志

CITATION:

滝口, 成美 ...[et al]. 食事療法中の糖尿病患者の看護を記述する数理モデルに現れる最適化問題 (関数方程式のダイナミクスと数理モデル). 数理解析研究所講究録 2009, 1637: 47-56

ISSUE DATE:

2009-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140522>

RIGHT:

食事療法中の糖尿病患者の看護を記述する 数理モデルに現れる最適化問題

NARUMI TAKIGUCHI (滝口 成美) and TAKASHI TAKIGUCHI (滝口 孝志)

Formerly: Japanese Red Cross Hiroshima College of Nursing (元日本赤十字広島看護大学)
and
Department of Mathematics, National Defense Academy of Japan (防衛大学校数学教育室)

Abstract

本稿では、慢性病患者の自己管理行動を記述する数理モデルを紹介し、そのモデルの解析を通じて、慢性病患者の自己管理行動における最適な支援法について議論する。

1 はじめに

近年、“メタボリックシンドローム”という言葉がいろいろなところで聞かれる事実で代表されるように、生活習慣病に関する関心が高まっている。本稿では、それらの中でも、糖尿病などの自己管理行動を必要とする慢性病に注目し、数理モデルの解析を通じて、自己管理行動を必要とする慢性病患者の最適な支援法について議論する。

食事療法中の糖尿病患者の支援においては、患者にあまり無理をさせず、負担の少ないレベルの食事療法をより長く持続させることが効果的であると主張する理論 ([1] 等) が数多く存在するが、[1] における主張の根拠等、これまでの通説は調査研究によるものが非常に多い。これらの蓄積により、患者の行動変容に関しては、行動科学の観点から説明可能なことが多く、それらを応用した患者教育方法の開発も進んできている。反面、これまでの研究成果を生かすことができるようなデータの統合がなされていないために、患者の行動についての理解が困難であったり、効果的な看護が行われていない施設も多い。

これらの事情をふまえ、[2] ではこれまでの調査研究の蓄積を理論的に統合する一般的抽象理論の確立を目標として、患者の自己管理行動の特徴を単純化し、力学現象と対比させることにより、糖尿病患者の自己管理行動に関する数理モデルが

$$\frac{dv(t)}{dt} = N(t) - F(t) - A_h(v(t) - h)H(v(t) - h) - A_l(l - v(t))H(l - v(t)) \quad (1)$$

なる微分方程式で提案されている。ここで、 $v(t)$ は患者による自己管理行動の実行度、 $N(t)$ は看護によるサポート、 $F(t)$ は実行度を下げる外的要因、 $H(\cdot)$ は Heaviside 関数、 h, l はそれぞれ、患者にとって無理のない実行度の限界を示す上限と下限である。

$F(t) = F$ が定数であり、看護によるサポートが $\int_0^T N(t)dt = FT$ に制限されているとき、期間 $[0, T]$ における患者の食事療法の最善サポートは、上記の方程式をみたし、 $\int_0^T v(t)dt$ を最大にするような看護のサポート関数 $N(t)$ を見つけることであるというのが、[2] における主張であり、本稿では、この問題を最適看護問題と呼ぶことにする。[2] では、糖尿病患者の自己管理行動に主眼を置いて議論されているが、提唱されたモデルはより広く適用される可能性を秘めているので、本稿ではより広く、慢性病患者の自己管理行動全般に興味の対象をおく。[2] における目標は看護理論において数多く存在するケーススタディの共通部分を取り出し、その一般法則を記述するモデルの確立であり、このような立場からの演繹的な研究は斬新かつ興味深いものであるが、残念なことに、[2] において提案されたモデルの研究は、その後進展していない。本稿では、[2] で提案された数理モデルを紹介し、そのモデルを用いて記述される最適看護法を求める最適化問題への一つの答えを与え

る。この解析を通じて、提案されたモデルの妥当性、具体的な医療・看護への応用、今後のさらなる発展について議論する。

本稿における議論は、以下の順序で展開される。

第2節では、[2]において提案された数理モデルとそのモデルを用いて記述される最適看護法を求める最適化問題を紹介する。

第3節では、第2節で紹介した最適化問題を数学的に解決する。

第4節では、本稿の結論として、第3節の解析結果を看護学の立場から検討すると共に、[2]において提案されたモデルの妥当性、具体的な医療・看護への応用の可能性、今後の改良とさらなる発展について議論する。

2 慢性病患者の自己管理行動を記述する数理モデルと最適看護問題

この節では、[2]で提案された自己管理行動を必要とする慢性病患者の自己管理行動を記述する数理モデルと、そのモデルを用いて記述される最適看護法を求める最適化問題を紹介する。[2]では糖尿病患者の自己管理行動に焦点を絞って議論が展開されていたが、そこで提案されたモデルは、広く慢性病患者の自己管理行動全般を記述していると解釈ができるので、本稿ではより広く、慢性病患者の自己管理行動全般を興味の対象とする。

定義 2.1.

- 時刻 t における患者の自己管理の実行度を $v(t)$ とする。糖尿病患者や慢性腎炎患者の食事におけるカロリー・塩分の制限や適当な運動量の実行度、喫煙による慢性気管支炎患者による煙草の本数制限の実行度等がこれに当たる。
- 時刻 t において、患者の自己管理の実行度を $v(t)$ を引き下げる要因全体の大きさを $F(t)$ とする。忙しさによる偏食、仕事のストレスによる喫煙等がこれに当たる。
- 時刻 t において、看護により患者の自己管理の実行度を $v(t)$ を引き上げる要因全体の大きさを $N(t)$ とする。家族による食事療法への協力、医者・看護者等による自己管理行動への適切な助言・サポート等がこれに当たる。

[2]における慢性病患者の自己管理行動を記述する数理モデル確立のアイデアは、 $v(t)$ を運動する粒子の速度に見立て、 $F(t), N(t)$ をそこに働く力と考えて、Newton の第2法則

$$ma(t) = f(t), \quad (2)$$

と対比することである。ここで、 $a(t) = v'(t)$ 、 $f(t)$ は時刻 t における外力の和である。また、モデルの性質上、 $m \equiv 1$ と仮定するが、妥当な仮定といえよう。

[2]では、自己管理行動を必要とする慢性病患者の自己管理行動を記述する数理モデルを確立するための第一歩として、現象をできるだけ単純化し、自己管理行動と自己管理行動に対する医療・看護による貢献の本質部分だけを取り出して記述することを目的としており、そのために相応の仮定を課している。本稿における以下の仮定は[2]の仮定とは若干異なり、[2]の発表後の検討の結果、[2]における仮定に必要な補足と修正を加えたものとなっている。

仮定 2.1.

- 慢性病患者の自己管理は、一般的には無限といってよいほど長期に渡るものであるが、具体的に数理モデルを扱う都合上、 $T > 0$ を十分大とし、期間 $[0, T]$ における慢性病患者の自己管理行動 $v(t)$ 、 $0 \leq t \leq T$ について議論するものとする。

- (ii) 日常生活の中で患者の自己管理の実行度を $v(t)$ を引き下げる要因は多数存在するが、それらの要因の全体を平均すれば、 $v(t)$ を引き下げる要因は常に一定であると仮定してよいであろう。従って、 $F(t) \equiv F > 0$ を定数関数とする。
- (iii) 医療や看護には様々な制約があり、患者を無制限にサポートできる訳ではない。ここでは、医療・看護によるサポートは、平均すれば実行度を引き下げる外的要因と同程度しか供給できない、すなわち、

$$\int_0^T N(t)dt = FT \quad (3)$$

を仮定する。ここで、 $0 \leq N(t) \in L^1[0, T]$, $v(t) \in C[0, T]$ とする。

- (iv) 患者の限界を超えて実行度 $v(t)$ を引き上げてしまうと、無理が生じ、実行度を下げる力が働くことを仮定する。すなわち、患者が無理なく自己管理を実行できる限界を h とし、 $v(t) > h$ のとき、 $-A_h(v(t) - h)H(v(t) - h)$ の力が働くことを仮定する。ここで、 $A_h > 0$ は定数であり、 $H(x)$ は Heaviside 関数

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (4)$$

である。食事療法などの自己管理行動における実行度には限界があり、やり過ぎはかえって身体に悪いことになる。その限界値を h_∞ とし、 $v(t)$ は $-\infty < v(t) < h_\infty$ の範囲を動くものとする。

- (v) (iv) とは逆に、実行度が下がり過ぎてしまうと、元の実行度に戻すことが困難になるだけでなく、さらに実行度を下げる力が働くことを仮定する ((自堕落性の仮定))。すなわち、自堕落性が作用する実行度を l とすると、 $v(t) < l$ のとき、 $-A_l(l - v(t))H(l - v(t))$ の力が働くことを仮定する。ここで、 $A_l > 0$ は定数であり、 $l < h$ とする。

以上の仮定により、自己管理行動を必要とする慢性病患者の自己管理行動を記述する数理モデルは

$$\frac{dv(t)}{dt} = N(t) - E(t) - A_h(v(t) - h)H(v(t) - h) - A_l(l - v(t))H(l - v(t)). \quad (5)$$

で与えられる。

[2] では、このモデルを用いて、外的要因 $F(t)$ に対して、医療・看護によるサポート $N(t)$ を上手く制御することにより、できるだけ実行度 $v(t)$ を高い状態で維持せよという最適看護問題が以下の形で提起されている。

問題 2.1. 仮定 (3), (5) の下で、

$$\int_0^T v(t)dt \quad (6)$$

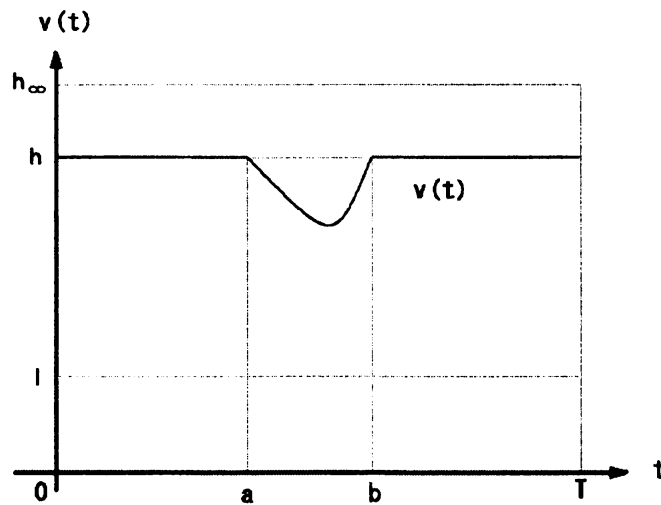
を最大にせよ。また、そのときの $N(t)$ を具体的に与えよ。

以下、この問題を数学と看護学の両者の立場から検討する。次節において、この問題を数学的に解決する。さらに第4節では、数学による解析結果を看護学の立場から検討し、モデルの妥当性、応用の可能性、今後のさらなる発展について議論する。

注意 2.1. 問題 2.1 で提起された問題は、高速道路や耐久レースなどで燃費効率のよい車の運転方法を求める問題や限られた資本下での効率よい生産計画等の制限された供給の下で効率の最適化を求める問題の一つであり、これらの問題との比較検討も、最適化問題の立場から興味深い。

3 最適看護問題の数学解析

この節では、前節で紹介した問題 2.1 を数学的に解決する。

Figure 1: 区間 $[a, b]$ における $v(t)$

3.1 $v(0) = h$ のとき

まず, 問題 2.1 を初期条件 $v(0) = h$ の下で考える. この場合, $v(t) \equiv h$ の場合を基準に考えることにする. このとき, $\int_0^T v(t)dt = hT$ となる. もし, $v(t) < h$, $a < t < b$, $v(a) = v(b) = h$ なる $0 < a < b < T$ が存在したとすると, 時間 $[a, b]$ の間に供給されたサポートは $\int_a^b N(t)dt = F(b-a)$ であり, $v(t) = h$, $a < t < b$ の状態と同じサポートを受けているので, (6) の最大値を実現する $N(t)$ に対して, $v(t) < h$, $a < t < b$, $v(a) = v(b) = h$ なる区間 $[a, b]$ は存在しない (Figure 1 参照).

従って, $t = 0$ からできるだけ $v(t) \geq h$ の状態を持続させることになるが, $v(t) > h$ なる $0 < t < T$ が存在すれば, 時刻 T の近傍では $N(t)$ によるサポートを十分に供給できないため, $v(t) < h$ となる筈である. まず, このときの様子を調べる.

補題 3.1. $0 < T_1 < T_0$,

$$F(T_0 - T_1) < h - l. \quad (7)$$

とする. 最適化問題

$$\begin{cases} \text{maximize} & \int_0^{T_0} v(t)dt, \\ \text{subject to} & \int_0^{T_0} N(t)dt = FT_1, \quad v(t) \leq h \end{cases} \quad (8)$$

の解は

$$\max \int_0^{T_0} v(t)dt = hT_0 - \frac{F(T_0 - T_1)^2}{2} \quad (9)$$

で与えられる.

証明. $l \leq v(t) \leq h$ における支配方程式は

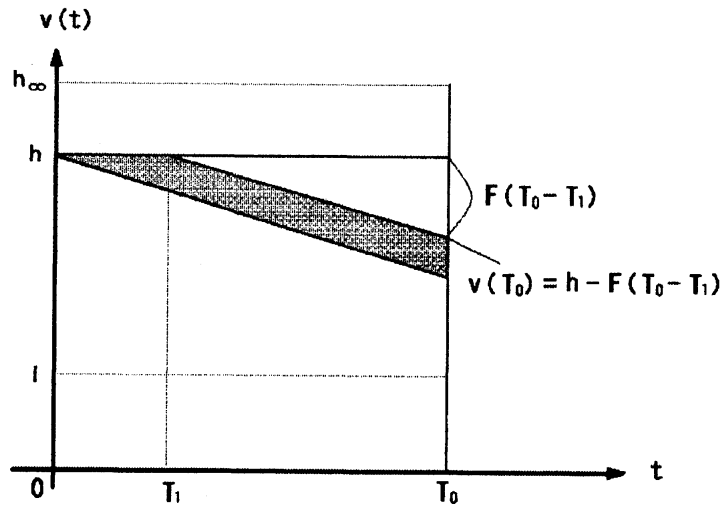
$$\frac{dv(t)}{dt} = N(t) - F$$

であり, $0 \leq N(t)$ が仮定されていたので,

$$-F \leq v'(t) \quad \text{for } \forall t \in (0, T_0) \quad (10)$$

である. また, 補題の仮定より,

$$v(T_0) = h - F(T_0 - T_1) \quad (11)$$

Figure 2: $v(t)$ の存在範囲

が成立する. 従って $v(t)$ の存在範囲は Figure 2 で示された範囲になるので, 補題が従う. この証明の結果, 最大値を与える $N(t)$ も具体的に与えられていることにも注意せよ.

□

定理 3.1.

$$l < h - \frac{F}{A_h} \quad (12)$$

かつ

$$v(0) = h, \quad (13)$$

ならば

$$\max \int_0^T v(t) dt = hT + \frac{F}{2A_h^2}. \quad (14)$$

が成立する.

証明. $\tilde{N}(t) := N(t) - F$ とおき,

$$X := \int_0^T (v(t) - h)H(v(t) - h)dt, \quad Y := \int_0^T (h - v(t))H(h - v(t))dt \quad (15)$$

とする. $I_{v>h} := \{t \in [0, T] \mid v(t) > h\}$ における支配方程式は

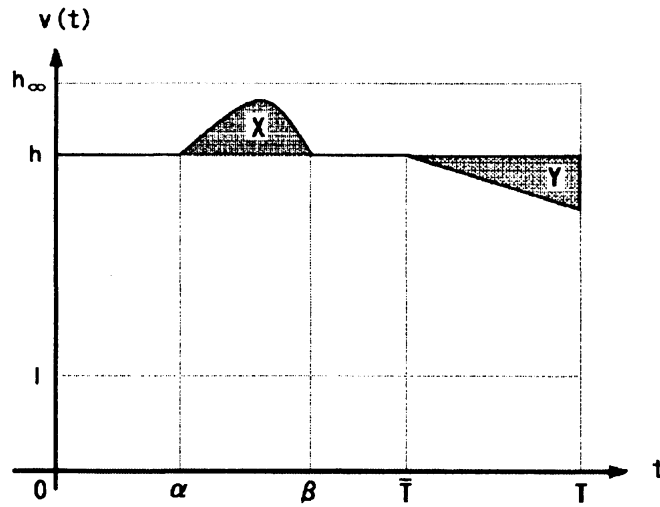
$$v'(t) = \tilde{N}(t) - A_h(v(t) - h), \quad (16)$$

である. また,

$$\int_{I_{v>h}} v'(t) dt = 0 \quad (17)$$

であるので, 区間 (もしくは区間の和) $I_{v>h}$ で $v(t) \equiv h$ の状態よりも多く消費した力積の量は,

$$\int_{I_{v>h}} \tilde{N}(t) dt = A_h \int_{I_{v>h}} (v(t) - h) dt = A_h X. \quad (18)$$

Figure 3: $v(0) = h$ のときの $v(t)$ の挙動

よって, $\int_0^{\bar{T}} N(t) = FT$ なる時刻 \bar{T} は次で求まる.

$$F\bar{T} + A_h X = FT \Leftrightarrow \bar{T} = T - \frac{A_h X}{F} \quad (19)$$

このとき,

$$Y = \frac{A_h^2 X^2}{2F} \quad (20)$$

よって, 定理 3.1 は次の問題

$$\text{maximize } \varphi(X) := X - \frac{A_h^2 X^2}{2F} \quad (21)$$

に帰着されるが, その解は容易に求まり, 次で与えられる.

$$\max \varphi(X) = \varphi\left(\frac{F}{A_h^2}\right) = \frac{F}{2A_h^2}. \quad (22)$$

ここで, X は $v(t)$ の形によらず, グラフ上の面積のみによることから, 定理が証明された. 最大値を与える $N(t)$ は一意ではない. その構成法は証明より明らかであろう.

□

注意 3.1. 定理 3.1 における仮定 (12) は技巧的な理由によるもので, この仮定により, $l < v(T) (< l)$ を保証している. この仮定は議論の本質には全く寄与していない.

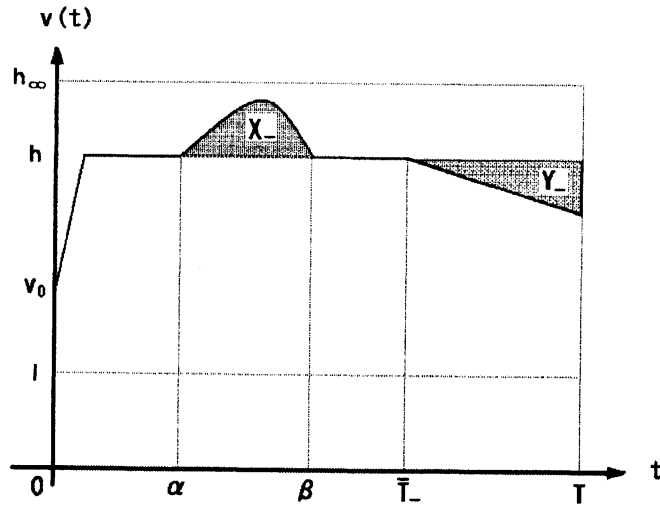
3.2 $l < v(0) < h$ のとき

次に, 問題 2.1 を初期条件 $l < v(0) := v_0 < h$ の下で考える.

定理 3.2. $l < v(0) := v_0 < h$ かつ

$$l < \min \left\{ h - \frac{F}{A_h}, v_0 \right\}. \quad (23)$$

を仮定する.

Figure 4: $l < v(0) < h$ のときの $v(t)$ の挙動

(i) $\frac{F}{A_h} \leq h - v_0$ ならば

$$\sup \int_0^T v(t) dt = FT + \frac{F}{2A_h^2} - \frac{h - v_0}{A_h} \quad (24)$$

が成立する.

(ii) $\frac{F}{A_h} > h - v_0$ ならば

$$\sup \int_0^T v(t) dt = FT - \frac{(h - v_0)^2}{2F} \quad (25)$$

が成立する.

証明. 実行度を h まで引き上げるために $v(t) \equiv h$ の状態よりも余計に必要な力積は $h - v_0$ である. このとき,

$$F\bar{T}_- + (h - v_0) + A_h X_- = FT \Leftrightarrow \bar{T}_- = T - \frac{(h - v_0) + A_h X_-}{F} \quad (26)$$

であるので,

$$Y_- = \frac{((h - v_0) + A_h X_-)^2}{2F} \quad (27)$$

を得る. よって, 定理 3.2 は次の問題

$$\sup \varphi_-(X) := X - \frac{((h - v_0) + A_h X)^2}{2F} \quad (28)$$

に帰着される. ここで,

$$2F\varphi_-(X) = - \left(A_h X - \left(\frac{F}{A_h} - (h - v_0) \right) \right)^2 + \frac{F^2}{A_h^2} - \frac{2F(h - v_0)}{A_h}. \quad (29)$$

であることに注目して, 以下を得る.

(i) $\frac{F}{A_h} \geq h - v_0$ のとき,

$$\max \varphi_-(X) = \varphi_- \left(\frac{F}{A_h^2} - \frac{h - v_0}{A_h} \right) = \frac{F}{2A_h^2} - \frac{h - v_0}{A_h} (\geq 0). \quad (30)$$

このとき, $X = \frac{F}{A_h^2} - \frac{h - v_0}{A_h}$ であり, 以下もいえる.

$$\bar{T}_- = T - \frac{1}{A_h}, \quad v(T) = h - \frac{F}{A_h}. \quad (31)$$

(ii) $\frac{F}{A_h} < h - v_0$ のとき,

$$\max \varphi_-(X) = \varphi_-(0) = -\frac{(h - v_0)^2}{2F}. \quad (32)$$

このときは, 以下を得る.

$$\bar{T}_- = T - \frac{h - v_0}{F}, \quad v(T) = v_0. \quad (33)$$

仮定 (23) の意味は注意 3.1 と同様で, 容易に理解できるであろう. (i), (ii) の何れの場合も上限値を与える $N(t)$ の構成法は証明から明らかであろう. (ii) の場合は上限値を与える $N(t)$ が一意に定まることも注意しておく. \square

3.3 $h < v(0) < l$ のとき

次に, 問題 2.1 を初期条件 $v(0) := v_0 > h$ の下で考える. この場合は $v_0 = h$ の場合の系として結論が得られる.

定理 3.3. $h < v(0) := v_0 \leq h_\infty$ かつ

$$l < h - \frac{F}{A_h}. \quad (34)$$

ならば,

$$\max \int_0^T v(t) dt = FT + \frac{F}{2A_h^2} + \frac{v_0 - h}{A_h}. \quad (35)$$

が成立する.

この定理における仮定 (34) の意味, 最大値を与える $N(t)$ の構成法などは, 全て定理 3.1 と同様のアイデアを用いて得られる.

4 まとめ

本節では, 本稿のまとめとして, 前節の解析結果の分析, モデルや解析法の問題点, 臨床への応用可能性, 今後の発展等について議論する.

まずは前節の解析結果を臨床看護の立場から分析する.

分析 4.1.

- 定理 3.1-3.3 より初期実行度 v_0 は高いほどよいことがいえる. このことは, 慢性病患者の自己管理における教育入院や初期教育の重要性を保証している.
- $v_0 < h$ であるときはできるだけ早く $v(t) = h$ を実現することが重要で, 無理なく継続できる実行度 (の最大値) で長く継続することが基本である. また, 無理をすれば, 将来的にツケが廻ってくる. 自己管理行動に於いては, より高い実行度を要求するよりも, より持続できる実行度を維持することが重要であるとの理論があり, 本稿に於ける解析結果はこれまでの定説を支持している.

- 定理 3.1, 3.3 において, 少しは無理をしても大丈夫であるとの結論を得たが, この結論に関しては, モデルに於ける仮定の正当性・現実の臨床現場との整合性等, 今後よりいっそうの検討と改良を要する可能性がある。

以上の分析結果からもわかるように, 本稿に於けるモデル確立のための仮定は非常に単純で, できあがったモデルも, また, その解析方法と結論も非常に単純であった。しかしながら, 得られた結論は臨床現場で主張されている定説を指示しており, 自己管理行動に於ける因果関係をよく表しているといえる。次に, 数理モデルそのものと最適看護問題の解法について反省する。

分析 4.2.

- 最適看護問題の解法がみつともないのではないか? 与えられた問題は非線型最適化問題であり, 本稿に於ける問題は単純であったため, 容易に解析ができたが, 将来の改良と発展に備え, より体系化した解析方法の確立が必要であろう。
- 非線型項の仮定はこのままでよいのか? 実行度に応じてかかる負荷は本稿の仮定のような単純な非線型項で記述できるほど, 単純では無いはずである。また, 一定期間あるレベルの実行度 ($v(t) = h$) を達成できれば, $h = h(t)$ は t と共に変化し, より大きくとれるのではないかと等々, 改良の余地は無限といってよいほどあると思われる。
- 具体的な係数の決定, 一般論の確立や個人差の扱いの難しさは相当なものであることが予想される。

他にも反省や批判を繰り返せばきりが無いが, 本稿に於けるモデルは自己管理行動に於ける原則的な法則を記述しようとしたもので, 微に入り細に渡り, 人間の行動を具体的に細かく記述することは元来不可能であろう。大切なのは原則的な因果関係を客観的な理論で説明することであるので, 本稿に於けるモデルは, そのままで十分通用するものであると主張することも可能である。どこまで現象を詳しく記述することを目標とするか, どの程度で十分なモデルが得られたと満足するかは, 今後, 医療・看護の専門家と議論を繰り返し, 考えていきたい問題である。

以上の議論から今後解決したい問題を幾つか提起する。

問題 4.1. 今後, 解決されるべき問題のうち, 重要なものは以下の 3 課題であろう。

- 臨床現場との協働によるモデルの臨床へのフィードバックとその検討。
- 数学的手法を含めたモデルの反省と改良。
- どこまで精密なモデルを作るべきであるかの議論。

これまでの議論をまとめて, 本稿の結論とする。

結論 4.1. 本稿における議論をまとめ, 以下の結論を得る。

- 妥当といえる仮定の下で非常に単純な数理モデルを開発し, そのモデルから生じる最適看護問題を解決した。
- 最適看護問題の解析結果は, 現在の自己療養中の慢性病患者に対する臨床・看護理論における定説とよく一致している。
- 提唱されたモデルとモデルから生じた最適看護問題は妥当なものであるといえる。

References

- [1] 河口てる子：糖尿病患者における食事療法実行パターンとその心理的相違, 日本赤十字看護大学紀要 **10** (1996) pp. 13-23.
- [2] 滝口成美：糖尿病食事療法の自己管理行動に関する看護の数理モデル開発（第1報）意義および基礎的モデルの開発, 日本糖尿病教育・看護学会誌, **5** (2001) pp. 112-119.

For any correspondence, please contact
Takashi TAKIGUCHI
Department of Mathematics,
National Defense Academy of Japan,
1-10-20, Hashirimizu, Yokosuka,
Kanagawa, 239-8686, JAPAN
e-mail: takashi@nda.ac.jp